全く問題にされていないわけである。

水の波なら上の発展方程式は流体力学によって解釈しなければならないし，プラズマのソリトンなら電磁気学の方程式によって解釈しなければならない。

物理学的研究はこのような形に対する興味がきっかけになって，なぜそうなるかという疑問へ発展する。そして物理的解釈ができたときは，これを再び形として表現しなければ安心できない。形として表現できなければ本当に理解できたとは思えない。

分枝の代数的記述*)

東経大　志　方　守　一

1. 群環による分枝の記述

樹木の分枝，或いは草花の分枝を典型的な形として代数的に書くことが出来ることを以前に報告した (Shikata, M., 1972, 1977) 。例えば，円錐花序 (panicle) の場合その分枝の形は式1.1 (Shikata 1977, p. 154, 式(13)) で書ける。

$$F=\sum_{u=0}^{n}(b_1+b_2)^u+b\sum_{u=0}^{n-1}(b_1+b_2)^u+f(b_1+b_2)^n . \tag{1.1}$$

これは群やモノイドを基礎とした環として，植物の分枝が考えられることを示している。この内容から，簡単な場合には，Weyl の著書 (1952, p. 68) に見られるような無限巡回群が導ける (Shikata 1977, p. 103) 。

2. 相似的変換

此処での上式のような表現は樹木の分枝の各部分の絶対的な大きさを考慮せずにその樹木の特徴的な形を示しているものと考えられる。つまり，ここでの記述は相似変換に対して不変な形式になっている。例えば，同じく，円錐花序に就いて(Shikata 1977, p. 177, 式 (1) ～ (6))

*) 口頭発表ではなく，紙上参加として研究会以前に頂いた原稿です。研究会当日その旨紹介し，関心ある方々に見て頂きました。

$$F_{\text{panicle-panicle}} = F_{\text{panicle}}(*s) + F_{\text{panicle}}(*b) + F_{\text{panicle}}(*f = F_{\text{panicle}}), \tag{2.1}$$

$$= F(*s) + F(*b) + [F(*s,\ *b,\ *f) - e]F(*s,\ \max n\text{'}s), \tag{2.2}$$

$$= \sum_{u=0}^{n}(b_1+b_2)^u + b\sum_{u=0}^{n-1}(b_1+b_2)^u + [\sum_{u=1}^{m}(b_1+b_2)^u + b\sum_{u=0}^{m-1}(b_1+b_2)^u + f(b_1+b_2)^m]\ (b_1+b_2)^n\ , \tag{2.3}$$

$$= \sum_{u=0}^{m+n}(b_1+b_2)^u) + b\sum_{u=0}^{m+n-1}(b_1+b_2)^u) + f(b_1+b_2)^{n+m} \tag{2.4}$$

$$= F_{\text{panicle}}\ . \tag{2.5}$$

で表されるように円錐花序の分枝を一部分だけ切り取って観察しても，その部分が元の全体と相似であり得ることを示している。

3. 三次元の線図

この記述法では又，この記述法の中の記号（群やモノイドの元）の三次元の行列表現を使うことによって分枝の様式を幾何学的なパラメータを伴った線図として表現することが出来る（Shikata 1977）。

4. 生物集団の分枝

このような表現は植物の分枝のみならず，生物集団の世代を経ることによる分枝にも適用できる（Shikata 1975, 1979）。

5. 肺や血管の分枝

同様のことは又，生物の器官のなかで類似の分枝を示すものについても適用できる。簡単な適用例として肺の分枝への適用が行われ，左右非対称に見える肺が実は対称なものの捩れた形のものであることが推測された（Shikata 1977a）。尚，類似の分野での適用例として，Shikata & Togawa (1978, 1978a) があり，これは同様の考え方を分枝を示す内臓の形態に適用したものである。

6. 雪の結晶の対称性

同様の方法が無生物である雪の結晶にも応用された（Shikata 1977b）。雪の結晶は微視的

に見れば，合同変換の対称性を持ち，巨視的に見れば相似変換の対称性を持つ。結晶を巨視的に見れば rational crystal と云ったようなものであり，微視的に見れば non-rational crystal と云ったようなものと考えられる (Shikata 1977b) 。

7. 群環による記述の他分野への適用

このような群環による分枝の記述法は，此処に述べたような，形の表現のみに留まらず，Shikata (1977, p. 124) に於て指摘したように， 表現しようとする対象物の其の他の特性，例えば色，遺伝的特徴，等をもその表現の対象として考えられていることを付記しておく。

8. この分野の研究の歴史から

ここに述べたような数学的方法は生物の対称性に対する群や群論の適用が永年に亘って少しずつ行われてきたことの延長線上にあり，此処では群環 (group ring 及び group algebra) を適用することを行っている。

本題に関連する分野の研究はレオナルド・ダ・ビンチやゲーテ，ルソー，等の分枝や植物形態に関する仕事は古いことであるので別として，今世紀に入ってからの仕事を考えればイギリスでは Thompson (1917) , Richards (1951, 1971) , Turing (1952) 等の仕事があり，そのほか可なり活発な研究が行われて来ている。米国では Weyl (1952) の仕事が有名である。

一方，最近の二，三十年を考えると，日本での研究活動も活発になってきている。Richards と同様の推論を明快な論理によって独自に行った仕事 (岩田義一， 1963) もある。 これは，発表の時期が仕事の完成より大分遅れたとのことである (参考文献の 15)， 其の外，多数の研究者 (参考文献の 16) の仕事が増えてきており，英米と比較しても可なり活発なのではないかと思える。これは筆者の寡聞の故であるかもしれないが，こうした分野の研究の今後の成長を期待できそうである。

参　考　文　献

1) 岩田義一 (1963) 。黄金分割と葉序。数学セミナー (東京)， Vol. 2, No. 11, p. 8-11.

2) Richards, F. J. (1951). *Phyllotaxis: Its quantitative expression and relation to growth in the apex.* Roy. Soc. London, Phil. Trans. B235, 509–564.

3) —— (1971). *The geometry of phyllotaxis and its origin.* Symp. Soc. Expt. Biol., No. 15. Control Mechanisms of Growth and Differentiation. Cambridge at the University Press, 217–245.

4) 志方守一（1972）。成長，対数ラセン，自由群，生物科学（岩波），24, 157 ~ 168.

5) ——（1975）。群と生物形態。数理科学，No. 147, p. 53.

6) Shikata, M. (1977). *Recurrent branchings and growth. Part I. Algebra, spatial transformations, and plant forms.* The J. of Humanities and Natural Sciences (The Tokyo College of Economics), No. 47, 69–181.

7) —— (1977a). *An equivalence of right and left bronchi of some mammals.* J. of Hum. & Nat. Sci. (Tokyo College of Economics), No. 46, 103–118.

8) Shikata, M. (1977b). *Rational and non-rational crystallizations.* J. of Hum. & Nat. Sci. (Tokyo College of Economics), No. 44, p. 1–9.

9) —— (1979). *Recurrent branchings and growth. Part II. A unified view on the elements of discrete population genetics.* J. of Hum. & Nat. Sci. (Tokyo College of Economics), No. 52, 61–112.

10) Shikata, M. & Togawa, T. (1978). *Graphical and geometrical symmetries of the vascular network of some biological organs.* J. of Hum. & Nat. Sci. (Tokyo College of Economics), No. 48, p. 11–18.

11) —— (1978a). *Spatial and functional degrees of freedom and symmetry of paired dendrite structures of some biological organs.* J. of Hum. & Nat. Sci. (Tokyo College of Economics), No. 48, p. 19–30.

12) Thompson, D'Arcy W. (1917). *On Growth and Form.* Cambridge U. Press, Cambridge.

13) Turing, A. M. (1952). *The chemical basis of morphogenesis.* Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. 237, B641, 37–72.

14) Weyl, H. (1952). *Symmetry.* Princeton U. Press, Princeton, N. J.

15) 個人的連絡による。

16) 1980年度基研短期研究計画「形の物理学」，物性研究 36 － 1（1981 － 4），に採録の多数の論文著者を参照。